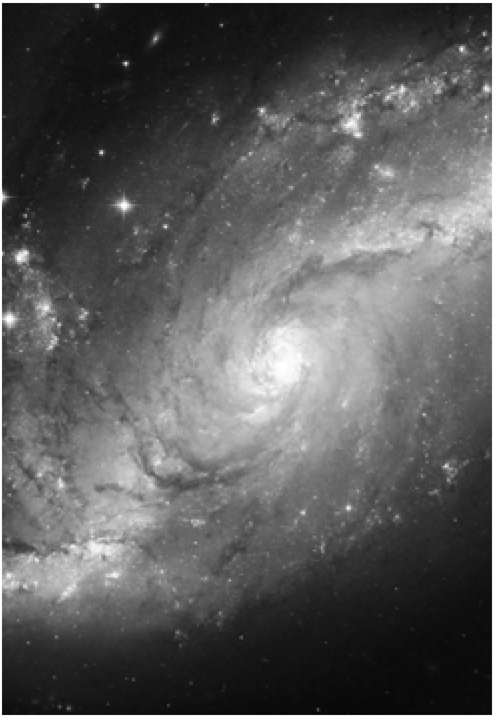
CONSTRUCTION D'UNE GÉOMÉTRIE EN RELATIVITÉ



Daniel Senequier

AVANT-PROPOS

Utilité d'une nouvelle géométrie en Relativité

La géométrie actuellement utilisée est extrêmement lourde (elle fait appel à la construction d'une base du dual de l'espace considéré comme espace vectoriel puis au calcul tensoriel) et ne permet pas de représenter l'espace dans un changement de référentiel accéléré ou soumis à un champ de gravitation. Elle ne permet de représenter qu'un point.

Il est donc impossible de décrire l'univers en Relativité et donc de décrire le mouvement d'un objet soumis à des forces (position, vitesse, accélération, à chaque instant).

A partir d'une construction géométrique très classique, une autre géométrie beaucoup plus simple permet de résoudre ces difficultés.

Elle conduit à la perception d'un espace ayant une structure double, à une explication de l'accélération de l'expansion de l'univers et fournit un pas vers la compréhension de la cause de l'invariance de la vitesse de la lumière : ce phénomène physique apparaît directement lié à la structure double de l'espace.

Ces résultats reposent sur un raisonnement mathématique classique et parfaitement rigoureux.

CONSTRUCTION D’UNE GÉOMÉTRIE EN RELATIVITÉ

Étude scientifique réalisée par Daniel Senequier

Dernière révision : Octobre 2023

Introduction

Cette étude se situe à mi-chemin entre les mathématiques et la physique. Il ne s'agit pas de réfléchir sur la physique en théorie de la Relativité.

Cette physique est parfaitement connue et vérifiée depuis plus d'un siècle. Nous la respectons intégralement. Il ne s'agit pas non plus de construire une théorie mathématique nouvelle mais seulement d'utiliser des outils mathématiques, eux aussi parfaitement connus, pour tenter une approche moins analytique et plus géométrique : le calcul analytique, utilisé largement en géométrie de la Relativité, permet d'obtenir des résultats numériques souvent difficiles d'interprétation en géométrie.

Ce que nous voulons démontrer c'est que, d'une part, la géométrie en Relativité peut s'aborder par une approche entièrement géométrique, indépendante de la physique, avec une représentation complètement géométrique de l'espace permettant de s'affranchir du calcul tensoriel dans des référentiels linéairement accélérés, avec une partie de calculs analytiques fortement réduite et c'est, d'autre part, que la structure de l'espace est plus complexe que la perception que nous en avons dans le référentiel euclidien.

Cette géométrie est particulière en ce que la norme définie dans un repère euclidien est instable : elle se modifie lors d'un changement de référentiel si les deux référentiels sont en mouvement relatif. Il en résulte des difficultés géométriques plus importantes si le référentiel en mouvement est accéléré. L'isomorphisme existant entre l'espace, considéré comme espace vectoriel, et son dual contenant les lois de la mécanique considérées comme des formes linéaires, est rompu. Pour rétablir cet isomorphisme, il faut transformer le dual de la même manière que l'espace vectoriel, c'est à dire construire une base du dual et utiliser le calcul tensoriel. Cet arsenal mathématique est très lourd.

Les difficultés géométriques, liées à la rupture de la norme euclidienne lors d'un changement de référentiel, sont liées au phénomène physique, parfaitement connu et vérifié, d'invariance de la vitesse de la lumière. Si ce phénomène physique particulier n'existait pas il n'y aurait pas de rupture de la norme euclidienne dans un changement de référentiel. Les lois de transformation permettant de passer du référentiel fixe dans le référentiel mobile se traduiraient par une simple translation (transformation affine de rapport 1) et/ou par une rotation qui ne change que les axes. La mécanique serait très proche de la mécanique classique, la seule différence consistant, lors d'un changement de référentiel, dans une transformation affine de l'expression du temps (translation) de la forme :

$$t' = t - \frac{vx}{c^2}$$

avec t' = temps dans le référentiel mobile, t = temps dans le référentiel fixe, v = vitesse relative du référentiel mobile, x = abscisse du point.

Le phénomène d'invariance de la vitesse de la lumière est traduit mathématiquement par le radical $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ qui brise la norme euclidienne.

Dans notre approche géométrique, nous avons voulu transformer cette expression analytique par une expression trigonométrique. L'idée n'est pas entièrement nouvelle puisque le développement théorique de MINKOWSKI repose sur une approche similaire. Mais MINKOWSKI fait appel à la trigonométrie hyperbolique. Nous avons fait appel à la trigonométrie circulaire par le changement de variable $\sin\theta = \left|\frac{v}{c}\right|$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

Dans ces conditions, il vient $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \cos\theta$, ce qui conduit à imaginer une rotation particulière d'angle θ. Pour ce faire, nous avons imaginé que l'espace, considéré comme espace vectoriel, est immergé dans un espace vectoriel de dimension supérieure (tout ceci est développé dans la partie théorique qui suit) et nous y avons construit la rotation. L'espace apparaît alors comme somme directe de deux sous-espaces vectoriels (sous-espaces vectoriels supplémentaires).

Le premier de ces sous-espaces vectoriels est identique à l'espace vectoriel contenu dans le référentiel fixe (pour cette raison, nous l'avons appelé espace «réel»). Il correspond à ce que serait l'espace vectoriel contenu dans le référentiel mobile si le phénomène d'invariance de la vitesse de la lumière n'existait pas. Le second sous-espace vectoriel est directement lié au phénomène d'invariance de la vitesse de la lumière.

Par ailleurs, cet espace vectoriel se déduit par une transformation linéaire (produit d'une rotation par une homothétie) d'une partie de l'espace «réel». Nous l'avons appelé «espace supplémentaire». Les paramètres y apparaissent avec un signe opposé à celui qu'ils ont dans l'espace «réel».

La représentation de l'espace apparaît ainsi sous une forme complètement géométrique dont l'étude fait relativement peu appel au calcul analytique.

Nous avons montré qu'il est possible de ne raisonner, en géométrie, que dans l'espace « réel » et d'en déduire une représentation complète de l'espace : nous utilisons pour ce faire les propriétés géométriques de l'espace «supplémentaire», déduites de l'espace «réel» par la transformation linéaire ci-dessus indiquée, puis nous faisons une sommation vectorielle.

Nous avons montré que le même processus de raisonnement géométrique dans l'espace «réel», puis d'extension par une transformation linéaire à l'espace «supplémentaire» s'applique aussi en mécanique, même dans des référentiels accélérés. Il est ainsi possible de construire une image complète de l'espace dans des référentiels accélérés en se dispensant de la construction d'une base du dual et de l'utilisation du calcul tensoriel.

Lorsque la trajectoire est courbe, le calcul devient plus lourd parce qu'il faut se ramener, à chaque instant, dans les conditions d'une trajectoire axiale par l'utilisation de rotations et de translations du référentiel fixe.

Nous avons également calculé le rayon de courbure de l'espace à un instant t dans des référentiels en accélération axiale et défini le centre de courbure.

L'expression de l'énergie (masse) est liée au choix du référentiel. L'énergie n'est donc pas un paramètre intrinsèque. Sa nature est donc géométrique. Nous avons choisi d'en donner une représentation vectorielle. Elle ne change rien d'autre que sa représentation sur un axe orienté normé. Ainsi, la masse apparaissant sous une forme vectorielle, nous lui appliquons la même rotation qu'aux autres paramètres d'espace (espace géométrique, temps). La masse apparaît alors invariante dans l'espace « réel ». Mais son expression, après la même rotation que celle des autres paramètres d'espace, se traduit par la même transformation homothétique.

Ainsi, la mécanique apparaissant dans l'espace «réel» serait identique à la mécanique de NEWTON si la mesure du temps était universelle, c'est à dire si la vitesse de la lumière était infinie. La seule différence avec la mécanique de NEWTON dans l'espace «réel» résulterait dans ce contexte de la finitude de la vitesse de la lumière.

L'espace «supplémentaire», non vide et dont l'existence résulte de l'invariance de la vitesse de la lumière, contient des paramètres physiques et géométriques (paramètres d'espace géométrique, de temps et d'énergie). Il a donc bien une réalité physique et géométrique, perçue dans le référentiel en mouvement et non perçue dans le référentiel fixe. Cela montre que la structure de l'espace est plus complexe que la perception que nous en avons dans le référentiel euclidien.

Cet espace « supplémentaire » possède en outre des propriétés de symétrie : les paramètres y apparaissent avec un signe négatif. La masse, de valeur négative, suggère une gravitation négative. Elle apparaît bien ainsi dans l'homothétie indiquée plus haut et appliquée à la mécanique.

Le phénomène d'invariance de la vitesse de la lumière apparaît ainsi comme une interaction entre la propagation de la lumière (propagation des ondes électromagnétiques) et un espace symétrique non perçu directement.

Théorie générale

Plaçons-nous, provisoirement, dans un espace de dimension 3 et, provisoirement également, dans le cadre de la relativité simple avec un repérage de LORENTZ.

Nous disposons donc de deux référentiels euclidiens en mouvement relatif linéaire uniforme. Ils sont qualifiés l'un de «fixe» et l'autre de «mobile».

Nous considérons maintenant l'espace vectoriel décrit dans ces deux référentiels comme sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension supérieure, espace vectoriel dans-lequel il est immergé.

Nous allons définir une rotation particulière dans cet espace étendu.

Construction du nouveau système de repérage :

les 2 référentiels sont $R(O,x,y,z)$, «fixe» et

$R'(O',x',y',z')$, mobile v désigne la vitesse de translation de R' par rapport à R, et $-v$ la vitesse relative de R par rapport à R', c désigne la vitesse de propagation de la lumière.

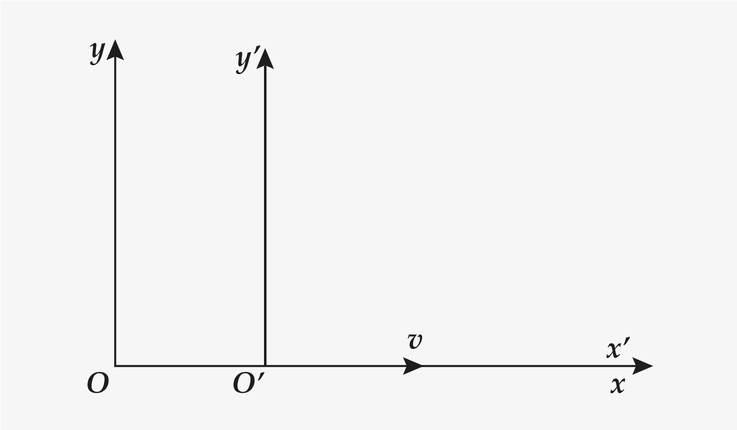


fig. 1 : Référentiels fixe et mobile

Les équations de transformation de LORENTZ s'écrivent :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nous allons compléter chacun des espaces réels E et E', définis par les repères $R(O,x,y,z)$ et $R'(O',x',y',z')$ par un espace supplémentaire. Les espaces complétés sont désignés par Ec et $E'c$. Pour ce faire, nous utilisons les propriétés d'espace vectoriel de l'espace euclidien.

Nous les étendons à l'espace complété.

$$R\,(O, x, y, z) \;\mapsto\; Rc\,(O, x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$$

$$R'\,(O', x', y', z') \;\mapsto\; R'c\,(O', x', y', z', \overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$$

Nous disposons du produit scalaire dans l'espace euclidien. C'est une forme bilinéaire symétrique, qui peut être définie dans un espace vectoriel de dimension quelconque. Sa forme quadratique permet de définir l'orthogonalité, la norme et la distance :

Etendons le produit scalaire à Ec et $E'c$.

Soient V_1 et V_2 deux vecteurs quelconques de Ec et $E'c$. La condition d'orthogonalité se traduit par :

$$V_1 \perp V_2 \;\Leftrightarrow\; V_1 \cdot V_2 = 0$$

La norme résulte de la forme quadratique :

$$\| V \| = \sqrt{\sum (x_i^2)}\,,\ (i = 1, 6)\,;$$

de plus : $\| V \| = 0 \;\Leftrightarrow\; V = 0$ (V = vecteur isotrope)

Nous pouvons définir l'angle de 2 vecteurs non nuls à partir du produit scalaire : soient V_1 et V_2 deux vecteurs non nuls, appartenant tous deux soit à Ec, soit à $E'c$, l'angle θ entre ces 2 vecteurs est défini par :

$$\cos\theta = \frac{V1 \cdot V2}{\|V1\| \cdot \|V2\|}$$

Nous supposons donc les 6 axes de chacun des repères $Rc\,(O, x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ et $R'c\,(O', x', y', z', \overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$ orthogonaux et possédant une norme au sens du produit scalaire, ce qui permet de définir des vecteurs unitaires sur chacun des axes.

Les repères Rc et $R'c$ forment donc chacun une base orthonormale, respectivement dans Ec et $E'c$.

Nous appelons Er et $E'r$ les restrictions de Ec et $E'c$ respectivement à l'espace «réel» (anciennement E et E'), Ev et $E'v$, les restrictions de Ec et $E'c$ à l'espace «supplémentaire».

Er, $E'r$, Ev et $E'v$ constituent donc des sous-espaces vectoriels de Ec et $E'c$.

Leurs sommes constituent Ec et $E'c$.

$$Ec = Er + Ev \quad ; \quad E'c = E'r + E'v$$

Les bases Rc, $R'c$, Rr, $R'r$, Rv, $R'v$ de Ec, $E'c$, Er, $E'r$, $E\,v$, $E'v$, respectivement, constituent des bases des espaces et sous-espaces vectoriels correspondants.

Rotation des axes :

Nous allons superposer un repère $R''c$ au repère $R'c$, en vue de définir une rotation dans l'espace $E'c$. Le repère R''c est identique au repère $R'c$. Son origine O'' coïncide avec O'.

Il est muni des axes $O''x''$, $O''y''$, $O''z''$,
$O''\bar{x}''$, $O''\bar{y}''$, $O''\bar{z}''$, et de la même norme que $R'c$.

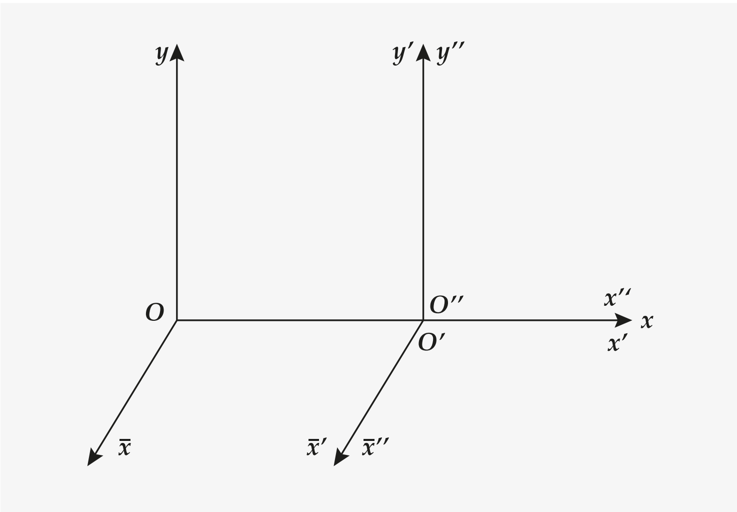


fig. 2 : Superposition des référentiels

Les coordonnées de P, point quelconque de $E'c$, sont :

$(x', y', z', \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ dans $R'c$.

Elles deviennent $(x'', y'', z'', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}'')$ dans $R''c$:

$$x' = x'' \;;\; y' = y'' \;;\; z' = z'' \;;\; \bar{x}' = \bar{x}'' \;;\; \bar{y}' = \bar{y}'' \;;\; \bar{z}' = \bar{z}''$$

Nous nous intéressons à l'expression $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Posons $\sin\theta = \left|\frac{v}{c}\right|$; $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

Nous reviendrons plus loin sur les bornes ainsi choisies.

Il vient : $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \cos\theta$

Nous effectuons une rotation d'angle θ du repère $R''c$ dans le plan $(O''x'', O''\bar{x}'')$. Les autres coordonnées restant inchangées, nous pouvons écrire les équations de changement de repère dans le plan $(O''x'', O''\bar{x}'')$.

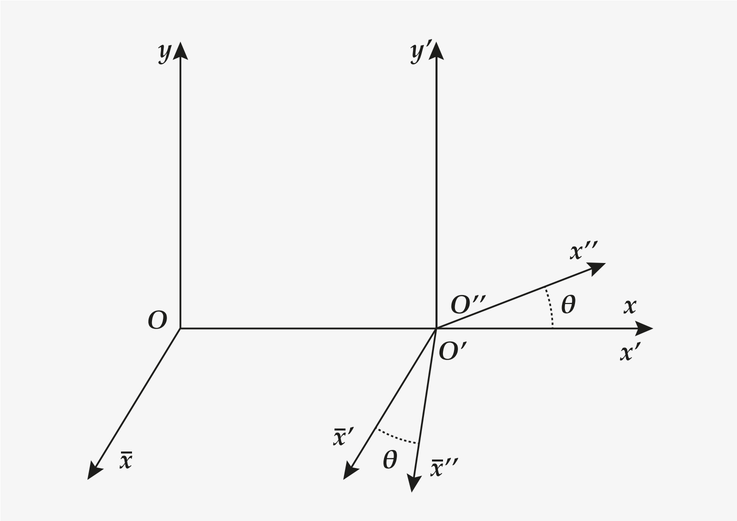


fig. 3 : Rotation du référentiel mobile

Les équations exprimant la rotation s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ \bar{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \bar{x}' \end{pmatrix}$$

avec $\bar{x}' = 0$

Il vient :

$$x'' = x' \cos(\theta)$$
$$\bar{x}'' = -\, x' \sin(\theta)$$

Or, $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$; $\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \cos(\theta)$

$\Rightarrow$ $x' \cos(\theta) = x - vt$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x'' = x - vt \\ \bar{x}'' = -(x - vt)\, tg(\theta) \end{array}\right.$$

Les coordonnées du point courant P de l'espace dans $R''c$ sont :

$$x'' = x - vt$$
$$y'' = y$$
$$z'' = z$$
$$\bar{x}'' = -(x - vt)\, tg(\theta)$$
$$\bar{y}'' = 0$$
$$\bar{z}'' = 0$$

Retour sur le domaine de définition de l'angle θ ($0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$) :

Le changement de variable était le suivant :

nous posions $\sin^2(\theta) = \dfrac{v^2}{c^2}$.

Il vient : $\sin(\theta) = \left|\dfrac{v}{c}\right|$ avec $\sin(\theta) \geq 0$.

L'angle θ étant défini à $2k\pi$ près, nous nous limitons aux valeurs de θ comprises entre 0 et 2π ;

$\sin(\theta) \geq 0$ impose donc $0 \leq \theta \leq \pi$.

La valeur $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ est interdite car $v < c$.

Le domaine de définition envisageable de θ est donc

$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et/ou $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Compte tenu de la nécessité d'une bijection entre θ et v, le domaine de définition de θ appartiendra soit au premier soit au deuxième des domaines ci-dessus.

Si nous choisissons le deuxième domaine, lorsque
$sin(\theta) \to 0 \Rightarrow \theta \to \pi$

Donc, et pour des raisons de continuité,
$v \to 0 \Rightarrow \theta \to \pi$

Pour $v = 0$, le changement de variable induit une rotation de π, c'est à dire une inversion de sens des axes de coordonnées. Or, et compte tenu des hypothèses initiales, pour $v = 0$, les axes de coordonnées doivent être orientés dans le même sens (référentiel de LORENTZ).

Donc, le choix de θ dans le domaine $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ doit être exclu.

Il en résulte :

1 - que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

2 - que les valeurs des paramètres dans l'espace supplémentaire sont donc bien précédées du signe moins.

Interprétation géométrique

Dans $R''r$, après rotation, nous avons une image de l'espace qui est identique à celle de l'espace dans Rr. Il n'apparaît qu'une translation du référentiel (transformation affine) identique à celle qui apparaîtrait en mécanique classique (newtonienne).

La propriété strictement «relativiste», conséquence de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le changement de référentiel, est transférée dans l'espace supplémentaire et projetée dans le repère $R''v$. Dans ce sous-espace vectoriel, les paramètres d'espace sont inversés (signe négatif). Les lois de transformation dans ce référentiel sont le produit, pour le paramètre concerné, de la même transformation affine que dans le passage de Rr à $R''r$ par une homothétie de centre l'origine et de rapport $-tg(\theta)$.

L'homothétie «purement relativiste» (sur la coordonnée $\bar{x}''$), liée à l'invariance de la vitesse de la lumière dans le changement de référentiel, est valable quelle que soit la vitesse du référentiel «mobile». Son rapport d'homothétie ($-tg(\theta)$), ne dépend que de la vitesse instantanée du référentiel «mobile» par rapport au référentiel «fixe».

Construction géométrique

Soit un vecteur de module **λ** dans le référentiel fixe (représentant un élément de longueur **λ**) parallèle à l'axe de translation du référentiel mobile, celui-ci animé d'une vitesse v par rapport au référentiel fixe. Ce vecteur de module **λ** possède un vecteur image dans le référentiel mobile de module **λ** relativiste obtenu (d'après ce qui précède) par la construction géométrique suivante (figure 4) :

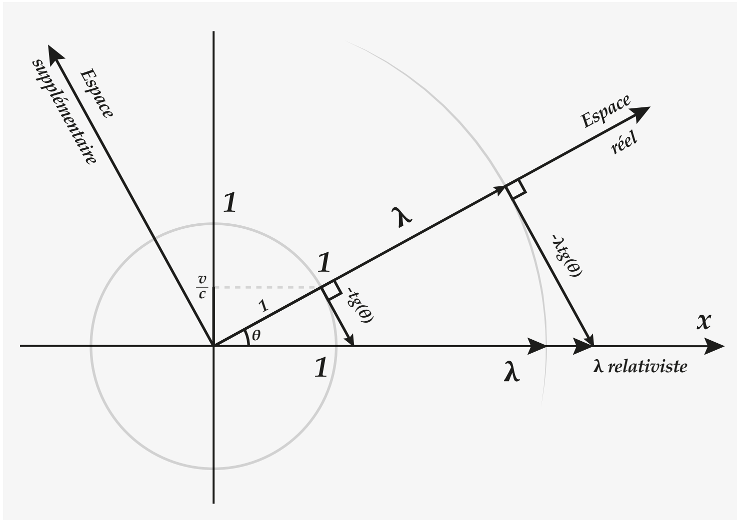


fig. 4 : Construction géométrique

Expression du temps

Nous considérons le temps comme espace vectoriel de dimension 1. Il est, habituellement, représenté par un scalaire réel, sur un axe orienté, muni d'une norme. Nous posons, avec :

$\vec{t}$ = vecteur temps,

t = scalaire réel,

$\vec{u}$ = vecteur temps unitaire.

Adjoignons à nos repères d'espace (à 6 dimensions) un espace vectoriel de dimension 1 représentant le temps.

Nous allons maintenant procéder de même que pour les paramètres d'espace géométrique en effectuant une extension de l'espace vectoriel représentant le temps (deuxième axe de coordonnées).

Nous utilisons les mêmes propriétés du produit scalaire, appliquées au système d'axes «temps réel» et «temps supplémentaire» (axes orthonormés) définissant un espace vectoriel de dimension 2.

L'angle de 2 vecteurs «temps» est défini de la même manière que précédemment, à partir du produit scalaire. Le deuxième axe de coordonnées «temps» possède donc un vecteur unitaire $\stackrel{\Rightarrow}{u}$.

Nous effectuons la même rotation d'angle θ dans l'espace défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\stackrel{\Rightarrow}{u}$ associés au repère $R''c$.

Dans ces conditions, après application des équations de transformation de LORENTZ et après avoir effectué la rotation d'angle θ, tel que défini plus haut, l'expression vectorielle du temps dans $R''c$ étendu s'écrit :

$$\begin{cases} t'' = t - \dfrac{vx}{c^2} \\ \\ \bar{t}'' = -\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) tg\,(\theta) \end{cases}$$

Nous avons une expression de t sur l'axe «réel» qui correspond à une transformation affine (respectant la loi d'addition des vitesses).

Sur l'axe « supplémentaire » :

La transformation de la coordonnée « temps » prend une forme similaire à ce que nous avions obtenu pour la coordonnée d'espace géométrique x'. La coordonnée «réelle» dans le repère mobile (après transformation affine) est transférée sur l'axe supplémentaire avec un coefficient dépendant de la vitesse instantanée du repère mobile ($-tg(\theta)$), et donc avec un signe négatif. Dans ce sous-espace, le temps varie en sens opposé de son sens de variation sur l'axe «réel».

Cette composante supplémentaire traduit une distorsion du temps dans le référentiel mobile liée à l'invariance de la vitesse de la lumière.

Il ne s'agit que d'un terme correctif. Le résultat obtenu traduisant une variation négative du temps dans l'espace supplémentaire ne contredit pas le principe d'EINSTEIN selon lequel deux événements, reliés par un lien de cause à effet dans un référentiel, doivent être reliés par un lien semblable dans un autre référentiel, c'est à dire que le changement de référentiel doit interdire que dans un référentiel l'effet ne précède la cause.

En effet, le principe énoncé ci-dessus s'applique à l'ensemble de l'espace, c'est à dire à la somme vectorielle, avant rotation, des deux sous-espaces vectoriels que nous avons construits et, dans ce cas, la proposition reste vraie (voir la figure 4 dans laquelle le paramètre λ désigne un intervalle de temps). Par contre, la proposition ci-dessus ne s'applique pas à l'un seul des deux sous-espaces.

Variations du temps dans le repère fixe et dans le repère ayant effectué la rotation :

$$t'' = t - \frac{vx}{c^2}$$

$$\bar{t}'' = -\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) tg\,(\theta)$$

On se place en un même point d'abscisse x fixe, à deux instants successifs t_1 et t_2 respectivement, v étant constant.

$$t_2'' - t_1'' = t_2 - t_1 \;;\; \bar{t}_2'' - \bar{t}_1'' = -(t_2 - t_1)\, tg\,(\theta)$$

Dynamique relativiste :

Une particule de masse m_0 au «repos» est animée d'une vitesse $\vec{u}$ constante. On la suppose évoluer dans l'espace hors de tout champ gravitationnel (relativité restreinte).

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\|\vec{v}\|^2}{c^2}}}$$

Expression de la masse en mouvement :

L'expression de l'énergie (masse) est liée au choix du référentiel. Ce n'est donc pas un paramètre intrinsèque mais un paramètre d'espace ce qui conduit à envisager une rotation d'angle θ semblable à celle que nous avions définie précédemment pour le temps et pour l'espace géométrique. Nous considérons ainsi l'énergie comme un espace vectoriel à deux dimensions, dans un référentiel lié à la masse en mouvement, celle-ci étant immobile dans le référentiel en mouvement.

Dans ces conditions, le vecteur représentant la masse s'écrit, avant rotation :

$$m' = \left[\begin{array}{l} \dfrac{m_0}{\cos(\theta)} \\ \\ 0 \end{array} \right.$$

Après rotation, il vient :

$$m = \left[\begin{array}{l} m_0 \\ \\ -\, m_0\, tg(\theta) \end{array} \right.$$

La partie «réelle» de la masse apparaît invariante.

La partie «supplémentaire» apparaît avec une valeur négative, (ce qui ne correspond nullement à de l'antimatière, au sens habituel du laboratoire).

Remarque :

$$tg(\theta) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \pi / 4$$

$$\Leftrightarrow \quad sin(\theta) = \sqrt{2} / 2 \quad \Leftrightarrow \quad v = c / \sqrt{2}$$

la valeur absolue de la masse dans l'espace «supplémentaire» est égale à la valeur absolue de la masse dans l'espace «réel».

Géométrie de l'espace :

Dans notre représentation, l'espace apparaît dans le référentiel «mobile», après rotation, sous la forme d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels constitués l'un par le même espace vectoriel que dans le référentiel «fixe», l'autre par la transformation d'un sous-espace vectoriel de ce même espace vectoriel par une homothétie de centre l'origine et de rapport $-tg(\theta)$.

Le référentiel en mouvement contient donc le même espace que le référentiel fixe plus un espace «symétrique» non vide, contenant des paramètres d'espace géométrique, de temps et d'énergie, c'est à dire possédant bien une réalité physique, et supporté par des axes linéairement indépendants de ceux de l'espace «réel» et du référentiel fixe.

Ceci montre que la structure de l'espace est plus complexe que la perception que nous en avons dans le référentiel fixe, c'est à dire dans le référentiel euclidien.

Construction graphique de cette représentation de l'espace

Le référentiel mobile ayant effectué une rotation d'angle θ, les paramètres supportés par les axes de l'espace « supplémentaire » se déduisent des axes correspondants par une homothétie de rapport $-tg(\theta)$, c'est à dire négative. La représentation géométrique que nous allons donner se construira donc en utilisant une rotation d'angle $-\theta$.

Imaginons deux observateurs, le premier dans le référentiel fixe, le second dans le référentiel mobile après rotation.

Selon ce qui précède, le premier observateur considérant un paramètre λ quelconque (distance entre deux points sur l'axe des abscisses, intervalle de temps entre deux événements, expression d'une masse), représenté dans son référentiel, le second observateur percevra le même paramètres λ dans le référentiel mobile sur un premier axe de coordonnées plus son image par homothétie de rapport $-tg(\theta)$ sur un second axe orthogonal au premier, ce qui peut se représenter sur le schéma suivant :

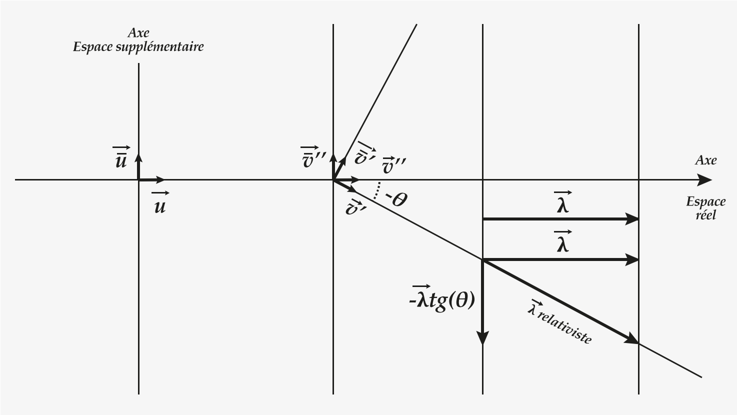


fig. 5 : Construction graphique d'un paramètre relativiste

Remarque : l'observateur dans le référentiel mobile, immobile dans son propre référentiel (vitesse du référentiel nulle par rapport à lui, donc rotation nulle dans l'espace étendu) ne perçoit pas l'espace supplémentaire. Il perçoit le même univers que l'observateur fixe, mais l'image qu'il en reçoit est différente en raison de l'invariance de la vitesse de la lumière (il perçoit donc un paramètre **λ** différent).

Les équations de transformation de LORENTZ étant valables quelle que soit la vitesse, si la vitesse du référentiel mobile varie sur son axe de translation (accélération axiale), l'angle de rotation du référentiel mobile suit les variations de vitesse du référentiel mobile, ce qui nous permet de construire une image de l'espace géométrique dans le cas d'une accélération axiale (voir figure 6).

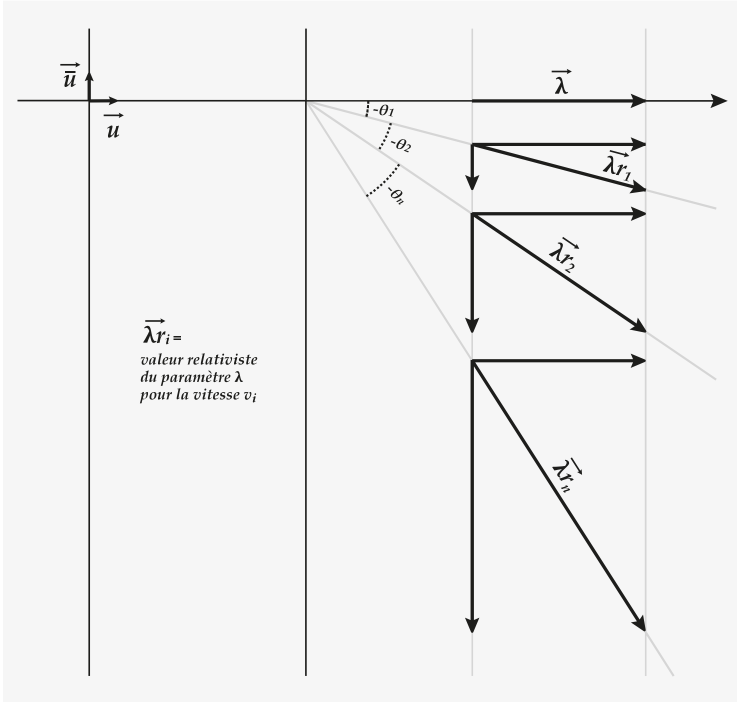


fig. 6 : Construction graphique de paramètres à différentes vitesses

Construction graphique complète :

Nous traçons le graphe de la fonction $y = -tg(arcsin(x))$ dans un repère orthonormé d'origine O.

Nous choisissons de représenter la vitesse (= v) du référentiel mobile par rapport à la vitesse de la lumière (= v/c) en choisissant $c = 1$.

Dans ce cas, x varie entre 0 et 1. Pour une vitesse v (avec $x = v$, $c = 1$), nous traçons au point d'abscisse x une parallèle à l'axe des ordonnées.

Elle coupe le graphe de y au point M d'abscisse v et d'ordonnée $-tg(\theta)$. Traçons depuis le point M la parallèle à l'axe Ox.

Elle recoupe la parallèle à l'axe Oy au point P de coordonnées $(1, -tg(\theta))$.

Par construction, la droite OP fait un angle égal à $-\theta$ avec l'axe des abscisses.

En ayant reporté le paramètre λ sur l'axe des abscisses, nous traçons aux extrémités du vecteur correspondant les parallèles à l'axe des ordonnées de notre référentiel. La droite OP recoupe ces 2 parallèles à l'axe des ordonnées en construisant, comme précédemment, le vecteur image de λ par les équations de transformation de LORENTZ.

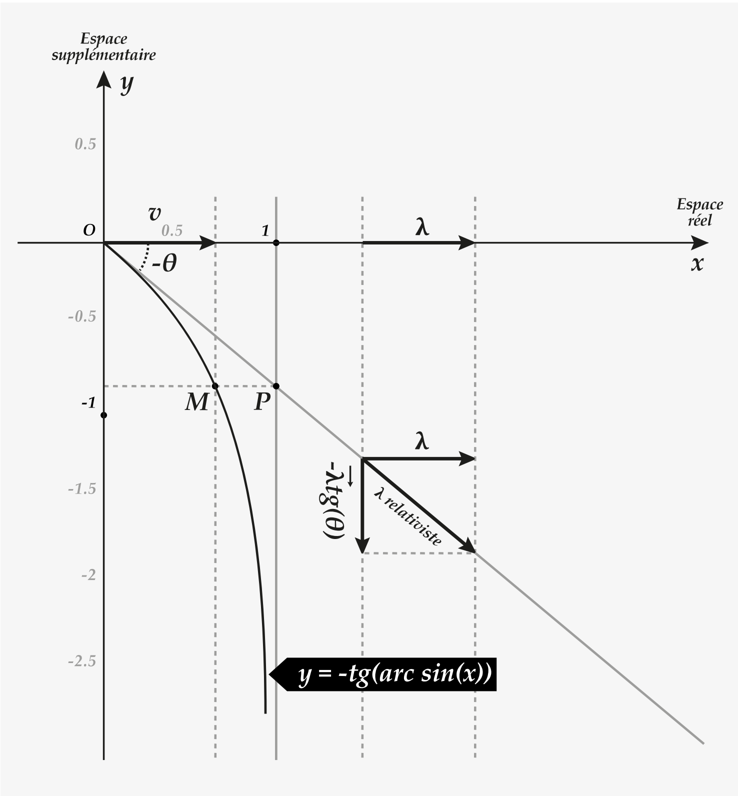


fig. 7 : Construction graphique complète de paramètres relativistes

Nous voyons dans cette construction que la vitesse est équivalente à un angle.

Cet angle (angle de rotation du référentiel en mouvement) varie lorsque la vitesse du référentiel mobile est accélérée, ce qui traduit une courbure de l'espace.

Calculons le rayon de courbure correspondant.

Courbure de l'espace dans des référentiels en accélération axiale

Dans le référentiel fixe, le référentiel mobile possède un mouvement de translation accélérée le long de l'axe des abscisses du référentiel fixe.

A l'instant t, l'origine du référentiel mobile se trouve au point O. Soit M un point quelconque de l'axe de translation du référentiel mobile (axe des abscisses du référentiel fixe). M' représente ce point dans le référentiel mobile après rotation.

L'origine du référentiel mobile est animée à cet instant de la vitesse v et parcourt la distance $dx = v.dt$ durant un intervalle de temps infinitésimal dt.

D'après ce qui précède, l'image ds de cet élément dx dans le référentiel mobile est représentée (voir figure 7) par un vecteur de coordonnées :

$$ds = \begin{bmatrix} -v.dt \\ tg(\theta)\ v.dt \end{bmatrix}$$

Cet élément différentiel ds au point M' est porté par la droite OP de pente $-tg(\theta)$ (conformément à la figure 7).

Pendant l'intervalle de temps dt la pente p de l'élément différentiel ds varie de :

$$dp = -\frac{d\theta}{cos^2(\theta)} \quad ;$$

Nous supposons que la vitesse v a une valeur positive ce qui est toujours possible avec un changement d'axes.

$$\sin(\theta) = \frac{v}{c} \Rightarrow \cos(\theta).\, d\theta = \frac{dv}{c} \Rightarrow d\theta = \frac{dv}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Nous avons donc :

$$dp = -\frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\sqrt{c^2 - v^2}} \quad ; \quad dp = -\frac{c^2 .\, dv}{(c^2 - v^2)^{3/2}}$$

Donc, pendant l'intervalle de temps dt l'élément différentiel ds subit une rotation d'angle :

$$d\varphi = -\,arc\,tg\left(\frac{c^2 .\, dv}{(c^2 - v^2)^{3/2}}\right)$$

Le rayon de courbure R est défini par :

$$R = \frac{ds}{d\varphi} \quad \text{avec} \quad ds = \frac{v .\, dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad d\varphi < 0$$

En raison de la concavité de la courbe tournée vers les valeurs négatives de l'axe des abscisses du référentiel mobile.

Donc :

$$|R| = \frac{v .\, dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\; arc\,tg\left(\frac{c^2 .\, dv}{(c^2 - v^2)^{3/2}}\right)}$$

$$|R| = \frac{c .\, v .\, dt}{\sqrt{c^2 - v^2}\; arc\,tg\left(\frac{c^2 .\, dv}{(c^2 - v^2)^{3/2}}\right)}$$

$$dt \to 0 \Rightarrow (ds \to 0 \; ; \; dv \to 0 \; ; \; d\varphi \to 0) \Rightarrow$$

$$|R| = lim_{dt \to 0} \frac{c .\, v .\, dt}{\sqrt{c^2 - v^2}\; \frac{c^2 .\, dv}{(c^2 - v^2)\; \sqrt{c^2 - v^2}}} \Rightarrow$$

$$|R| = c\,\frac{v}{\gamma}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

avec γ = accélération instantanée du référentiel mobile.

Remarques :
$\gamma = 0 \Rightarrow R = \infty$ (relativité simple)

A chaque instant, le rayon de courbure est le même en tout point de l'axe des abscisses du référentiel fixe.

Centre de courbure :
Le centre de courbure est porté par la perpendiculaire à la droite OP au point M' supportant l'élément ds , vers les valeurs négatives de l'axe des abscisses du référentiel mobile.

M étant un point fixe sur l'axe des abscisses du référentiel fixe, l'ensemble des droites OP (O = origine en mouvement accéléré du référentiel mobile) constitue, lorsque t varie, l'enveloppe de la courbe représentant la courbure de l'espace.

Représentation complète de l'espace dans le cas des référentiels accélérés

Afin de décrire non seulement l'espace mais aussi le mouvement dans le changement de référentiel, il faut transformer les lois de la mécanique de la même façon que l'espace vectoriel a été transformé. Les lois de la mécanique (équations différentielles) étant des formes linéaires et appartenant donc au dual de l'espace vectoriel, il convient de transformer le dual de la même manière que l'espace vectoriel.

Il faut donc d'abord construire une base du dual, puis la matrice de transformation est appliquée simultanément à chaque vecteur de la base de l'espace vectoriel et à chaque vecteur correspondant de la base du dual.

La matrice de transformation est donc un tenseur.

Dans la représentation de l'espace que nous avons construite, l'espace est décomposé en deux sous-espaces vectoriels : le sous-espace réel et le sous-espace supplémentaire.

Le sous-espace réel est le même que l'espace vectoriel représenté dans le référentiel fixe Il possède donc le même dual. Les lois de la mécanique sont donc les mêmes dans ces deux espace et sous-espace vectoriel.

Le sous-espace supplémentaire se déduit par le produit d'une rotation et d'une homothétie d'une partie du sous-espace réel. La même transformation doit donc être appliquée au dual. La rotation ne change pas le dual.

Concernant l'homothétie :

Après que nous ayons effectué la rotation et avant application de l'homothétie, le sous espace vectoriel symétrique est identique (isomorphe) à une partie du sous espace réel (associée à l'axe de translation).

Le dual de ce sous espace symétrique est donc le même que celui de la partie correspondante du sous espace réel.

Ce sont donc les mêmes lois de la mécanique qui s'appliqueraient dans l'espace supplémentaire et dans la partie isomorphe de l'espace réel si nous en restions là.

Ensuite, nous appliquons simultanément l'homothétie aux vecteurs du sous- espace supplémentaire et aux éléments du dual c'est à dire, concrètement dans notre cas, aux paramètres de mouvement (vitesse et accélération) qui sont des applications linéaires et qui ont été calculés dans la partie du sous espace réel correspondante du sous espace supplémentaire.

Nous avons donc construit une description complète de l'espace et du mouvement dans le référentiel mobile accéléré à un instant donné.

Au final, l'image de l'espace dans le sous-espace supplémentaire, y compris le mouvement, se construisent à partir de la même homothétie d'une partie du sous-espace réel et du mouvement correspondant dans cette partie du sous-espace réel. Ainsi, le référentiel mobile étant accéléré le long d'un axe, dans le sous-espace réel du référentiel mobile qui est le même que l'espace vectoriel contenu dans le référentiel fixe, l'expression du temps t' dans le référentiel mobile à l'instant t du référentiel fixe s'exprime par :

$$t' = t - \int_0^x \frac{v(x)\, d(x)}{c^2}$$

L'abscisse x' d'un point de l'espace à l'instant t s'exprime par :

$$x' = x - \int_0^t v(t)\, dt$$

Il est alors possible d'appliquer les lois de la mécanique à un instant t, pendant un élément différentiel de temps dans le sous-espace réel du référentiel mobile, lois de la mécanique (définissant la vitesse et l'accélération) qui sont les mêmes que dans le référentiel fixe.

Il faut ensuite appliquer une homothétie de l'abscisse du point correspondant de l'espace réel sur l'axe correspondant de l'espace supplémentaire ainsi qu'une homothétie de son mouvement sur le même axe.

Les difficultés habituelles de représentation de l'espace dans des référentiels euclidiens accélérés proviennent du fait que la structure de l'espace est plus complexe que l'image qu'on en a dans le référentiel euclidien.

Nous avons donc construit une adaptation de mécanique newtonienne au cas de l'invariance de la vitesse de la lumière. Cette adaptation est impossible dans le cadre de la théorie de Relativité d'Einstein en raison d'une insuffisance de sa géométrie.

Observation importante

Le principe d’équivalence d’EINSTEIN, selon lequel un référentiel soumis à un champ de gravitation est localement (au niveau de ce référentiel) équivalent à un référentiel accéléré, permet d’étendre tout ce qui a été dit précédemment au cas de présence d’un champ de gravitation.

Il est donc ainsi possible, selon la méthode ici indiquée, de décrire l’espace et les mouvements dans l’espace en présence d’un champ de gravitation sans qu’il soit nécessaire de construire une base du dual ni de faire appel au calcul tensoriel.

Approche de compréhension des causes de l'invariance de la vitesse de la lumière

Les équations de transformation de Lorentz sont la traduction mathématique du phénomène d'invariance de la vitesse de la lumière.

La suppression de cette invariance invalide les équations de transformation de Lorentz et donc la structure double de l'espace qui en est la conséquence géométrique. Inversement, la suppression de la structure double de l'espace – avec, donc, conservation de la norme euclidienne dans un changement de référentiel - invalide les équations de transformation de Lorentz et donc le phénomène d'invariance de la vitesse de la lumière.

L'invariance de la vitesse de la lumière est donc directement liée à cette structure double de l'espace.

Le 2ème sous-espace vectoriel n'a aucune composante dans le référentiel fixe. Il n'est donc pas directement perçu dans le laboratoire ou le télescope (il n'est perçu qu'indirectement en faisant la somme géométrique des 2 sous-espaces vectoriels et se traduit par une rupture de la norme euclidienne).

Les 2 sous-espaces vectoriels sont donc distincts et nécessairement imbriqués physiquement l'un dans l'autre. Les éléments géométriques de dimension nulle n'existent pas en physique (ils n'existent qu'en mathématique). L'espace est donc « pixellisé », c'est à dire sous forme de pixels appartenant au 1er et de pixels appartenant au 2ème sous-espace vectoriel, à la manière des cases blanches et des cases noires de l'échiquier.

La lumière qui est perçue directement, dans le 1er sous-espace vectoriel, reste contenue et se déplace dans le premier sous-espace vectoriel. La lumière pouvant être dans le 2ème sous-espace vectoriel y reste contenue (sous-espace invisible directement).

Ce mouvement rappelle le déplacement du fou sur l'échiquier : il y a un fou blanc qui se déplace uniquement sur les cases blanches et ne rencontre jamais le fou noir qui ne se déplace que sur les cases noires.

L'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide impose que le temps de transfert d'un photon d'une case (ou d'un pixel) du sous-espace vectoriel auquel il appartient vers une case adjacente du même sous-espace vectoriel soit une constante universelle indépendante du mouvement de la source.

OBSERVATION FINALE

La tentative de mise en évidence d'une gravitation négative peut s'envisager dans des zones de faible extension en marge de champs gravitationnels intenses, notamment au sein de nuages de gaz peu denses (donc soumis à des forces gravitationnelles internes faibles) éloignés de tout corps massif.

Ce type de nuage de gaz possède une température interne proche de celle du milieu environnant (température du rayonnement cosmique dont la température de fonds de l'univers). Une force de gravitation négative au sein d'un tel gaz entraînerait une expansion du gaz (avec diminution de sa température) et raréfaction des particules en son cœur (forme du nuage grossièrement torique).

Références bibliographiques

Cette étude ne s'appuie sur aucune autre étude récente ou en cours. Seuls sont utilisés des éléments parfaitement connus de la physique et des mathématiques.

Pour toute indication complémentaire, se rapporter aux cours universitaires de mathématiques et de physique de niveau 1 et de niveau 2.

Publications historiques

Quatre conférences sur la théorie de la Relativité
Auteur : Albert Einstein
Publiées pour la première fois en 1921,
Les quatre conférences que prononça
Albert Einstein à l'Université de Princeton en
cette même année ont pour sujet la théorie de
la Relativité restreinte.
Editions Dunod

The Principle of Relativity :
A collection of original memoirs on the special and
general theory of Relativity,
with notes by A. Sommerfeld
Auteurs : H.A. Lorentz, Albert Einstein
isbn: 0486600815
Editeur : Dover
Année de publication: 1952
first published in 1923

Temps, espace, matière. Leçons sur la théorie de
la Relativité générale
Auteur: H. Weyl,
Editeur: Blanchard (Paris)
Année de publication: 1958

Encyclopédies

Relativité restreinte
E-publication : Wikipédia
fr.wikipedia.org/wiki/Relativite_restreinte

Relativité générale
E-Publication : Wikipédia
fr.wikipedia.org/wiki/Relativite_generale

Contact

Daniel SENEQUIER
e-mail : **dsenequier@orange.fr**
site web : **danielsenequier.com**

« Un problème sans solution est un problème mal posé »

Cette citation d'Albert Einstein illustre involontairement l'impossibilité qu'il a lui-même rencontrée de représenter l'univers dans sa globalité : il raisonne dans un espace de dimension 4 (l'espace-temps de Minkowski) alors que l'univers ne peut se représenter que dans un espace de dimension supérieure.